Similitudes Planes

Chapitre 2

I. Généralités

Définition :

Une similitude est une transformation qui conserve les rapports de longueur et les angles géométriques

Théorème :

Une transformation est une similitude $\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, (M, N) \in \mathcal{P}^2, M'N' = kMN$
k est le rapport de la similitude

Théorème :

$\varphi : z \to az + b$ et $\varphi : a\bar{z} + b$ sont des similitudes de **rapport** $\boldsymbol{k = |a|}$

Théorème :

La **composée** de2 similitudes de rapports k_1 et k_2 a pour **rapport** $\mathbf{k_1 \times k_2}$

Théorème :

Une similitude de **rapport** k a pour **réciproque** une similitude de rapport $\frac{1}{k}$

II. Similitudes directes $z' = az + b = ke^{i\theta}z + b$

Définition :

C'est une similitude qui **conserve les angles orientés**

Théorème :

Toute similitude qui n'est pas une translation admet un **point fixe** unique qui est le centre de la similitude. $\left(z_C = \frac{b}{1-a}\right)$

Théorème :

$\forall\, (A, B) \in \mathcal{P}^2,\ A \neq B$, l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$ est constant et est l'angle de la similitude

Théorème :

La **composée** de2 similitudes directes d'angles θ_1 et θ_2 a pour **angle** $\boldsymbol{\theta_1 + \theta_2}$ $[2\pi]$

Théorème :

Il existe une et une seule similitude S telle que S(A) = A' et S(B) = B'

Bilan :

Rapport	Angle	Type
k = 1	$\theta \equiv 0\ [2\pi]$	Translation
	$\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$	Rotation
k ≠ 1	$\theta \equiv 0\ [\pi]$	Homothétie
	$\theta \not\equiv 0\ [\pi]$	Similitude

III. Similitudes indirectes $z' = a\bar{z} + b = ke^{i\theta}\bar{z} + b$

Définition :

C'est une similitude qui **ne conserve pas les angles orientés**

Théorème :

C'est la **composée** d'une similitude directe et d'une symétrie axiale