Suites et récurrence

Chapitre 8

I. Suites arithmétique

$\forall\, n, U_{n+1} = U_n + r$ $\qquad U_n = U_0 + nr$ $\qquad U_n = U_m + (n-m)\,r$

<u>Somme :</u>

$$S_n = \frac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(U_1 + U_n)}{2}$$

Pour une suite commençant à U_1

II. Suites géométrique

$\forall\, n, V_{n+1} = q \times V_n$ $\qquad V_n = V_0 \times q^n$

<u>Somme :</u>

$$S_n = V_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$S_n = V_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

Pour une suite commençant à V_1

III. Sens de variation d'une suite

On compare $U_{n+1} - U_n$ à 0 ou $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1.
Pour une suite géométrique, si q > 1, la suite est croissante, sinon elle est décroissante.

IV. Suites minorées, majorées, bornées

Une suite est <u>majorée</u> $\Leftrightarrow \exists\, M \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \boxed{U_n \leq M}$
Une suite est <u>minorée</u> $\Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \boxed{U_n \geq m}$
Une suite est <u>bornée</u> $\Leftrightarrow \exists\, (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall\, n \in \mathbb{N}, \boxed{m \leq U_n \leq M}$

V. Suites convergentes

$$(U_n) \text{ converge} \Leftrightarrow \exists\, l \in \mathbb{R}, \lim_{n \to +\infty} (U_n) = l$$

- Toute suite convergente est bornée
- Toute les suites extraites d'une suite convergente sont convergentes et ont la même limite
- Toute suite ↗ et majorée converge
- Toute suite ↘ et minorée converge

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} (U_n) = l \\ f \text{ continue sur } I \\ l \in I \end{array}\right\} \lim_{n \to +\infty} f(U_n) = f(l)$$

<u>Théorème des gendarmes :</u>

$$\lim_{n \to +\infty} (U_n) = \lim_{n \to +\infty} (W_n) = l \text{ et } U_n \leq V_n \leq W_n$$
$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (V_n) = l$$

VI. Suites adjacentes

$$(U_n)\ et\ (V_n) \text{ sont adjacentes} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{l'une est } \nearrow, \text{l'autre est } \searrow \\ \text{leur différence tend vers } 0 \end{cases}$$

VII. Démonstration par récurrence

1. Énoncé de la proposition
2. Initialisation
3. Hérédité
4. Conclusion