Les applications linéaires entre e.v.

M4 – Chapitre 2

Soients E, F des $e.v.$ et $\varphi : E \to F$ une application linéaire

I. Définitions

$$\boxed{\varphi \text{ est une application linéaire} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\,(u,u') \in E^2 & \varphi(u+u') = \varphi(u) + \varphi(u') \\ \forall\,(u,\alpha) \in E \times \mathbb{R} & \varphi(\alpha u) = \alpha \cdot \varphi(u) \end{cases}}$$

Exemples : Id, homothétie ($h_k(u) = ku$), rotation $\left(R_\alpha(z) = ze^{i\alpha} = h_{e^{i\alpha}}\right)$, projection vectorielle.

- $\mathcal{L}(E;F)$: ensemble des applications linéaires de $E \to F$
- $\mathcal{L}(E;E) = \mathrm{End}(E)$: ensemble des endomorphismes de $E \to E$

II. Noyau et image

1. Définitions

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{Im}\,\varphi = \{v \in F \mid \exists\, u \in E, \varphi(u) = v\} = \mathrm{Vect}\big(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\big) \\ &\mathrm{Ker}\,\varphi = \{u \in E \mid \varphi(u) = 0\} \\ &\mathrm{rang}\,\varphi = \dim \mathrm{Im}\,\varphi \end{aligned}}$$

2. Propriétés

- $\mathrm{Im}\,\varphi$ $s.e.v$ de F
- $\mathrm{Ker}\,\varphi$ $s.e.v.$ de E
- φ surj. $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\,\varphi = F$
- φ inj. $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$

III. Théorème du rang

$$\boxed{\dim E = \dim \mathrm{Ker}\,\varphi + \dim \mathrm{Im}\,\varphi}$$

- $\dim \mathrm{Im}\,\varphi \leq \dim E$
- $\varphi \in \mathrm{End}(E)$ et φ injective ou surjective $\Rightarrow$ φ bijective

IV. Projecteurs

$$\boxed{p \text{ est un projecteur} \Leftrightarrow p^2 = p} \quad (p^2 = p \circ p)$$

$\underline{p(u) = u - \lambda v}$ pour une projection parallèle à v