

Factorisation LDM et factorisation de Cholesky

AnaNum – Chapitre 3

I. Factorisation LDM

$$A = LV = L \underbrace{(DD^{-1})}_{D_{ii}=V_{ii}} V = LD \underbrace{(D^{-1}V)}_M = L \underbrace{DM}_V$$

L : tri inf unit
M : tri sup unit
D : diagonale

1. Maths

$$L(1:j, 1:j)v = A(1:j, j) \quad v = V(1:j, j)$$

$$D(j, j) = v(j) \quad M(i, j) = \frac{v(i)}{D(i, i)}$$

$$L(j+1:n, 1:j)v = A(j+1:n, j)$$

$$L(j+1:n, j) = (A(j+1:n, j) - L(j+1:n, j)v(1:j-1))/v(j)$$

2. Codage

```

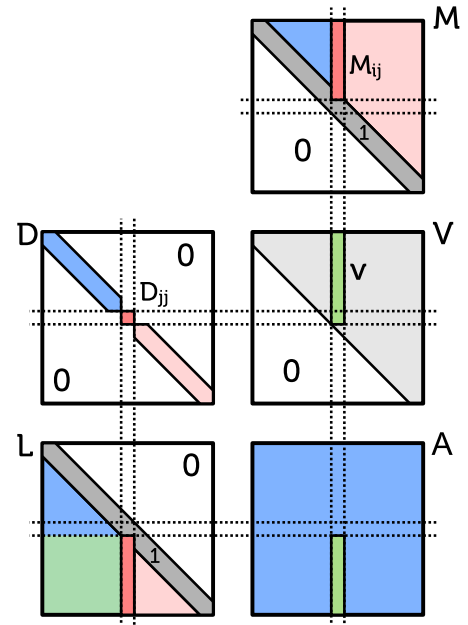
fonction [L,D,M] = factorisation_ldm(A)
pour j = 1 à n faire
    v(1:j) = tri_inf(L(1:j, 1:j), A(1:j, j))
    D(j, j) = v(j)
    pour i = 1 à j - 1 faire
        M(i, j) = v(i)/D(i, i)
    L(j+1:n, j) = A(j+1:n, j) - L(j+1:n, 1:j-1)v(1:j-1)/v(j)

```

3. Matrices symétriques : $A = LDL^T$

Si A est symétrique, $M = L^T$, donc on connaît v sans résoudre de système.

$$v(i)_{1 \leq i \leq j-1} = D(i, i)L(j, i) \quad v(j) = A(j, j) - L(j, 1:j-1)v(1:j-1)$$



Factorisation LDM et factorisation de Cholesky

AnaNum – Chapitre 3

II. Matrices définies positives

$$A \text{ définie positive} \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ symétrique} \\ \forall x \neq 0, x^T A x > 0 \end{cases}$$

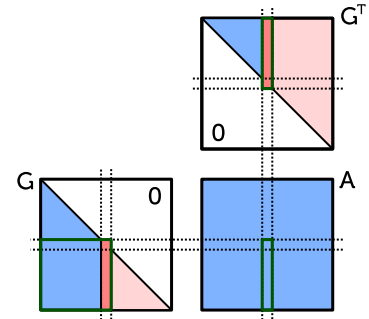
III. Factorisation de Cholesky : $A = GG^T$

$$A \text{ définie positive et } A = LDL^T \Rightarrow D_{ii} > 0 \forall i \Rightarrow \underset{G: \text{tri. inf. unique}}{A = GG^T}$$

1. Calcul

$$\underbrace{L(j,j)L(j:n,j)}_v = A(j:n,j) - \underbrace{L(j,1:j-1)}_{=L^T(1:j-1,j)} L(j:n,1:j-1)$$

$$\Rightarrow L(j,j)^2 = v(1) \Rightarrow \boxed{L(j:n,j) = v/\sqrt{v(1)}}$$



2. Codage

% version non optimisée

fonction L = Cholesky(A)

pour j = 1 à n faire

 v = A(j:n,j) - L(j,1:j-1)L(j:n,1:j-1)

 L(j:n,j) = v/sqrt(v(1))

% version optimisée 1 boucle

fonction A = Cholesky(A)

pour j = 1 à n faire

 A(j:n,j) = A(j:n,j) - A(j,1:j-1)A(j:n,1:j-1)

 A(j:n,j) = A(j:n,j)/sqrt(A(j,j))

% version optimisée 2 boucles

fonction A = Cholesky(A)

pour j = 1 à n faire

 si j > 1 alors

 pour k = 1 à j - 1 faire

 A(j:n,j) = A(j:n,j) - A(j,k)A(j:n,k)

 A(j:n,j) = A(j:n,j)/sqrt(A(j,j))