Méthodes de résolution itératives

AnaNum – Chapitre 5

I. Les méthodes itératives

On cherche à trouver la solution d'un système $Ax = b$ grâce à une suite de vecteur $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers la solution $\tilde{x}$.

$$Ax = b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j + A_{ii}\boldsymbol{x_i} + \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}x_j = b_i$$

```
fonction x = iterative (A, ite_max, epsilon, x [, ω])
```

tant que (non conv) **faire** $\quad n_{iter} < n_{iter_{max}}$ et $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| > \varepsilon$ ou $\left\|Ax^{(k)} - b\right\| > \varepsilon$

		Forme matricielle $(A = D + U + L)$
Jacobi	**pour** i = 1 **à** n **faire** y(i) = $\frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}x_j}{A_{ii}}$ **finpour** **pour** i = 1 **à** n **faire** x(i) = y(i) **finpour**	x = D\(b – (L + U)x)
Gauss-Siedel	**pour** i = 1 **à** n **faire** x(i) = $\frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}x_j}{A_{ii}}$ **finpour**	x = (D + L)\(b – Ux)
Relaxation	**pour** i = 1 **à** n **faire** x(i) = $\omega\frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}x_j}{A_{ii}} + (1-\omega)x_i$ **finpour**	x = (D + ωL)\((1-ω)D – ωU)x + ωb)

fintantque

Notations matricielle des méthodes

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \Leftrightarrow x^{(k+1)} = \underbrace{M^{-1}N}_{C}x^{(k)} + \underbrace{M^{-1}b}_{d} \Leftrightarrow \boxed{x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d}$$

II. Condition suffisante de convergence

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - \tilde{x} \underset{\substack{\tilde{x}=C\tilde{x}+d \\ \text{par def}}}{=} C\left(x^{(k)} - \tilde{x}\right) = C^2\left(x^{(k-1)} - \tilde{x}\right) = C^{k+1}(x_0 - \tilde{x})$$

$$\left\|e^{(k+1)}\right\| = \left\|C^{k+1}(x_0 - \tilde{x})x_0 - \tilde{x}\right\| \leq \|x_0 - \tilde{x}\| \underbrace{\|C\|^{k+1}}_{\to 0\,?}$$

- La suite de vecteurs converge si il existe une norme telle que $\|C\| < 1$.
- Si A est à diagonale dominante, Jacobi et Gauss-Seidel convergent
- Si A est symétrique définie positive, la relaxation converge pour $0 < \omega < 2$

III. Conditionnement et stabilité

$$A(x+\delta_x) = (b+\delta_b) \quad \Rightarrow \quad A\delta_x = \delta_b \quad \Rightarrow \quad \delta_b = A^{-1}\delta_x$$

$$\frac{\|\delta_x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A^{-1}\|\|A\|}_{cond(A)} \frac{\|\delta_b\|}{\|b\|} \qquad cond(A) = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}$$ bon si proche de 1, mauvais si $\gg 1$

IV. Méthode du gradient

$$Ax = b \Leftrightarrow \quad \min_x \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho d \qquad \underbrace{d = -(Ax-b)}_{\text{direction de descente}} \qquad \underbrace{\rho = -\frac{d^T\left(Ax^{(k)}-b\right)}{d^T Ad}}_{\text{pas de descente}}$$

V. Outils mathématiques

1. Matrice a diagonale dominante

$$A \text{ a diag. dominante} \Leftrightarrow \quad \forall\, i \quad |A_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} A_{ij}$$

2. Normes vectorielles

$$\boxed{\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$$

$f(x)$ norme $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$ et $\forall x$ et $f(x) = 0\ si\ x = 0$
$f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$
$f(x+y) \leq f(x) + f(y)$
$\|x^T y\|_p \leq \|x\|_p \|y\|_q$ avec $\frac{1}{1} + \frac{1}{q} = 1$

3. Norme matricielles de type vectorielle : Frobenius

$$\boxed{\|A\|_F^2 = \sum_i \sum_j C_{ij}^2}$$

Pas sous-multiplicative ($\|AB\| \not\leq \|A\|\|B\|$)

4. Norme matricielle d'opérateur

$$\boxed{\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |A_{ij}|$$
$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |A_{ij}|$$
$$\|A\|_2 = \max_i \sqrt{\mu_i} \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$$

$$\|kA\| = |k|\|A\|$$
$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$
$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$