

Calcul de valeurs propres

AnaNum – Chapitre 6

I. Valeurs propres

$$A \in \mathbb{R}^{p \times p} \rightarrow \lambda_i \in \mathbb{C} \quad v_i \in \mathbb{C}^p$$

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

$$AV = VD$$

$$v \rightarrow \lambda : \lambda = \frac{v^T A v}{v^T v} = \frac{v^T A v}{\|v\|^2} \stackrel{\text{si } \|v\|^2=1}{=} v^T A v$$

$$\lambda \rightarrow v : (A - \lambda I)v = 0$$

$$R_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}$$

cercles de Gershgorin : contiennent tous les λ

II. Valeurs singulières

$$B \in \mathbb{R}^{n \times p} \rightarrow \mu_i \in \mathbb{R} \quad u_i \in \mathbb{R}^p \quad v_i \in \mathbb{R}^p$$

$$Bv_i = \mu_i u_i \quad B^T u_i = \mu_i v_i$$

$$B = UDV^T$$

$$A = B^T B \Rightarrow (\mu_i^2, v_i) \text{ val. et vect. p. de } A$$

III. Matrice carrée symétrique définie positive

$$(\lambda_i, v_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0 \quad v_i^T v_i = 1$$

$$v_i^T v_j = 0 \quad V^T V = I \quad (\text{base de } \mathbb{R}^n)$$

IV. Méthode de la puissance itérée

$$z^{(k+1)} = \frac{Az^{(k)}}{\|Az^{(k)}\|} \quad \|Az^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |\lambda_1| \quad z^{(k)} \underset{k \rightarrow \infty}{\propto} v_1$$

$$A^{(2)} = A - \lambda_1 v_1 v_1^T$$

Déflation : vp suivante

fonction [Z, λ] = PuissanceIteree(A, Z)

tant que (non conv) **faire**

$$Z = AZ$$

$$Z = Z / \|Z\|$$

fintantque

$$\lambda = Z^T A Z$$

fonction [Z, D] = PuissanceItereeMult(A, Z)

tant que (non conv) **faire**

$$Z = AZ$$

$$Z = \text{orthogonalise}(Z) \quad [Z \ R] = \text{qr}(Z)$$

fintantque

$$D = Z^T A Z$$

V. Calcul de valeurs propres avec QR

$$\begin{cases} Z_k &= A Q_k \\ (Q_{k+1}, R_{k+1}) &= \text{qr}(Z_k) \end{cases} \quad T_k = Q_k^T A Q_k \rightarrow D$$

$$T_k = Q_k^T A Q_k = Q_k^T Q_{k+1} R_{k+1} = Q_{k+1}^{(2)} R_{k+1}$$

$$T_{k+1} = Q_{k+1}^T A Q_{k+1} = R_{k+1} Q_{k+1}^{(2)} \Rightarrow \text{On a une suite de } T_k \text{ calculable via QR}$$

pas besoin de Z_k

fonction [Z, D] = PuissIte_QR(A)

$$T = Q_0^T A Q_0$$

tant que (non conv) **faire**

$$[Q \ R] = \text{qr}(T)$$

$$T = RQ$$

fintantque

fonction [Z, D] = PuissIte_QR_tridiag(A)

$$T = \text{tri_diag}(A)$$

tant que (non conv) **faire**

$$[Q \ R] = \text{qr_tri}(T)$$

$$T = RQ$$

fintantque

Tridiagonalisation

$$A_{nk}^{(k)} = A_{kn}^{(k)T} = -\alpha e_1$$

$$A^{(k)} = H_k^T A^{(k-1)} H_k \Rightarrow A_{nn}^{(k)} = H_k^T A_{nn}^{(k-1)} H_k = A_{nn} - v w^T - w v^T$$

$$w = p - \frac{\beta v^T p}{2} v \quad p = \beta A_{nn} v$$

fonction A = tri_diag (A)

pour k = 1 à n-2 **faire**

$$[v, \beta] = \text{vecteurDeHouse}(A(k+1:n, k))$$

$$p = \beta * A(k+1:n, k+1:n) * v$$

$$w = p - (\beta * v^T * p / 2) * v$$

$$A(k+1, k) = A(k, k+1) = \|A(k+1:n, k)\|$$

$$A(k+1:n, k+1:n) = A(k+1:n, k+1:n) - v w^T - w v^T$$

finpour

$$\begin{aligned} \% x &= A_{kn} \\ \% p &= \beta A_{nn} v \\ \% w &= p - \frac{\beta v^T p}{2} v \\ \% \alpha & \\ \% A_{nn} & \end{aligned}$$

