Récapitulatif de spécialité Mathématiques

I. Arithmétique

1. Divisibilité et congruences

$\boxed{a|b \Leftrightarrow b = ka}$

Division euclidienne : $\exists!\ (q,r) \in \mathbb{N}^2, a = bq + r, 0 \leq r < b$

$\boxed{a \equiv b\ [n] \Leftrightarrow n|a-b}$

2. Critère de divisibilité

$2|N \Leftrightarrow a_0 \equiv 0\ [2]$
$5|N \Leftrightarrow a_0 \equiv 0\ [5]$

$4|N \Leftrightarrow \overline{a_1a_0} \equiv 0\ [4]$
$25|N \Leftrightarrow \overline{a_1a_0} \equiv 0\ [25]$

$3|N \Leftrightarrow$ somme des chiffres $\equiv 0\ [3]$
$9|N \Leftrightarrow$ somme des chiffres $\equiv 0\ [9]$
$11|N \Leftrightarrow$ somme alternées des chiffres $\equiv 0\ [11]$

3. PGCD et PPCM

$k|d \Leftrightarrow k|a$ et $k|b$ $\qquad \boxed{(a \wedge b)(a \vee b) = ab}$

Théorème d'Euclide :
$a \wedge b = b \wedge r$

Théorème de Bézout :
$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2, au + bv = 1$

Théorème de Gauss :
$\boxed{a|bc \text{ et } a \wedge b = 1, a|c}$
$a|n \text{ et } b|n \text{ et } a \wedge b = 1 \Rightarrow ab|n$

$$\boxed{d = a \wedge b \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d|a \\ d|b \\ \frac{a}{d} \wedge \frac{b}{d} = 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d|a \\ d|b \\ \exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2, au + bv = d \end{array}\right.}$$

4. Équation diophantiennes

$\boxed{ax + by = c}$ $\quad (d = a \wedge b)$ Solution si c = kd

- On trouve une solution particulière (x_0, y_0) *(Bézout)*
- $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ *(par différence entre l'équation et celle avec la sol part)*
- Résolution :

$a|b(y - y_0)$
$a|y - y_0$
$\boxed{y = ak + y_0}$

$b|a(x - x_0)$
$b|x - x_0$
$\boxed{x = bk' + x_0}$

5. Nombres premiers

$p|ab \Rightarrow p|a$ ou $p|b$

Petit théorème de Fermat :
p premier, a pas multiple de p
$\boxed{a^{p-1} \equiv 1\ [p]}$

Corollaire :
Si p premier
$\boxed{a^p - a \equiv 0\ [p]}$

II. Similitudes planes

Similitude directe : $\boxed{z' = az + b} = ke^{i\theta}z + b$

$$\forall\ (M,N) \in \mathcal{P}^2, \boxed{\mathrm{k} = \frac{M'N'}{MN}}, \boxed{\theta = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}\right)}$$

Rapport	Angle	Type
k = 1	θ ≡ 0 [2π]	Translation
	θ ≢ 0 [2π]	Rotation
k ≠ 1	θ ≡ 0 [π]	Homothétie
	θ ≢ 0 [π]	Similitude

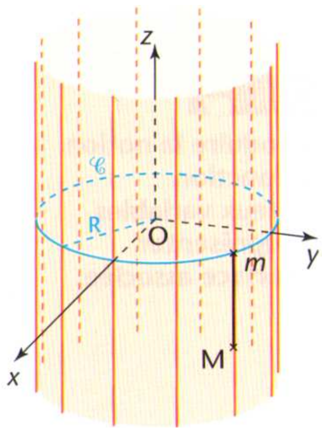
Similitudes indirectes : $\boxed{z' = a\bar{z} + b} = ke^{i\theta}\bar{z} + b$

III. Sections planes de surfaces

1. Cylindre

a. Équation (axe (Oz))

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$$



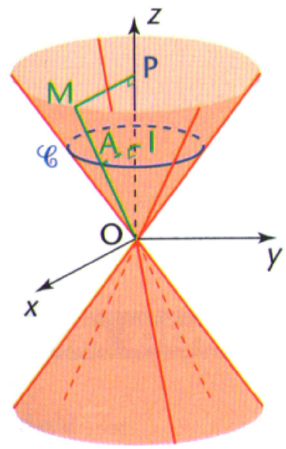
b. Section

Plan	Condition	Section
z = k		Cercle (Ω(0, 0, k), R)
x = k **y = k**	|k| < R	2 droites
	|k| = R	1 droite
	|k| > R	∅

2. Cône

a. Équation (axe (Oz))

$\boxed{x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2}$ $\lambda = \tan \varphi$



b. Section

Plan	Condition	Section
z = k	k = 0	Point O(0, 0, 0)
	k ≠ 0	Cercle $x^2 + y^2 = (\lambda k)^2$
x = k **y = k**	k = 0	Deux droites sécantes en O
	k ≠ 0	2 hyperboles $z = \pm\sqrt{\frac{x^2 + k^2}{\lambda^2}}$