

Logarithme népérien et fonctions puissances

Chapitre 5

I. Logarithme népérien

1. Définition

La fonction logarithme népérien est l'inverse de l'exponentielle. Elle est définie sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, \forall y \in]-\infty, +\infty[, \ln(x) = y \Leftrightarrow x = \exp(y)$$

2. Propriétés

Propriété 1 :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(\exp(x)) &= x \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exp(\ln(x)) &= x \end{aligned}$$

Propriété 2 :

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction logarithme népérien est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété 3 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Propriété 4 :

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} (\ln(x))' &= \frac{1}{x} \\ (\ln(u))' &= \frac{u'}{u} \end{aligned}$$

3. Propriétés algébriques

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(a^n) = n \ln(a)$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$$

$$\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln(a)$$

4. Croissance comparée

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^n} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^n \ln(x)) = 0$$

5. Approximation affine de $\ln(x)$ en 1 et de $\ln(x + 1)$ en 0

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln(x)}{x - 1} \right) = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + x)}{x} \right) = 1$$

Pour x proche de 1 : $\ln(x) \approx x - 1$

Pour x proche de 0 : $\ln(1 + x) \approx x$

$$(\ln |u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

II. Les fonctions x^α

1. Définition

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

2. Propriétés

$$\forall (x, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$$

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

$$\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$$

III. Les fonctions a^x

1. Définition

$$a^x = e^{x \ln a}$$

2. Dérivée

$$(a^x)' = \ln(a) a^x$$