Logarithme népérien et fonctions puissances

Chapitre 5

I. Logarithme népérien

1. Définition

La fonction logarithme népérien est l'inverse de l'exponentielle. Elle est définie sur $]0,+\infty[$.

$$\forall\, x \in\ ]0,+\infty[, \forall\, y \in\ ]-\infty,+\infty[, \quad \ln(x) = y \Leftrightarrow x = \exp(y)$$

2. Propriétés

<u>Propriété 1 :</u>

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}, &\quad \ln(\exp(x)) = x \\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, &\quad \exp(\ln(x)) = x \end{aligned}$$

<u>Propriété 2 :</u>
La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction logarithme népérien est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

<u>Propriété 3 :</u>

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

<u>Propriété 4 :</u>
La fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$
$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

3. Propriétés algébriques

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} &\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \\ &\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \\ &\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \\ &\ln(a^n) = n\ln(a) \\ &\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a) \\ &\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}\ln(a) \end{aligned}$$

4. Croissance comparée

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^n}\right) = 0 \\ &\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right) = 0 \\ &\lim_{x\to 0}(x^n\ln(x)) = 0 \end{aligned}$$

5. Approximation affine de *ln(x)* en 1 et de *ln(x + 1)* en 0

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{\ln(x)}{x-1} \right) = 1$$
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right) = 1$$

Pour x proche de 1 : $\ln(x) \approx x - 1$
Pour x proche de 0 : $\ln(1+x) \approx x$

$$(\ln\ |u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

II. Les fonctions x^α

1. Définition

$$\boxed{x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}}$$

2. Propriétés

$$\forall\ (x, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$$

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$$
$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$
$$\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$$

III. Les fonctions a^x

1. Définition

$$\boxed{a^x = e^{x \ln x}}$$

2. Dérivée

$$\boxed{(a^x)' = \ln(a)\, a^x}$$