

Produit scalaire et géométrie

Chapitre 6

I. Produit scalaire

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB), et K celui de B sur (AC).

$$\text{Alors } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{u}(x, y, z) \quad \vec{v}(x', y', z') \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

II. Droite

$$\begin{array}{l} \text{Équation paramétrique} \\ (A(x_A, y_A, z_A) \in \mathcal{D}) \end{array} \quad \begin{cases} x = x_A + \lambda a \\ y = y_A + \lambda b \\ z = z_A + \lambda c \end{cases}$$

$$\text{Équation cartésienne} \quad ax + by + c = 0$$

$$\text{Vecteur normal} \quad \vec{n}(a, b)$$

$$\text{Vecteur directeur} \quad \vec{u}(-b, a)$$

$$\text{Distance au point } M_0 \quad d(M_0, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

III. Plan

$$\begin{array}{l} \text{Équation paramétrique} \\ A(x_A, y_A, z_A) ; \vec{u}(a, b, c) ; \vec{v}(a', b', c') \\ \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v}) \end{array} \quad \begin{cases} x = x_A + \alpha a + \beta a' \\ y = y_A + \alpha b + \beta b' \\ z = z_A + \alpha c + \beta c' \end{cases}$$

$$\text{Équation cartésienne} \quad ax + by + cz + d = 0$$

$$\text{Vecteur normal} \quad \vec{n}(a, b, c)$$

$$\text{Distance au point } M_0 \quad d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\begin{array}{l} \text{Propriétés} \\ \mathcal{P} \perp \mathcal{P}' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \\ \mathcal{D} \perp \mathcal{P}' \Leftrightarrow \mathcal{D} \perp \text{à toute droite de ce plan} \end{array}$$

IV. Cercle

- Équations de cercle :
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ avec $\Omega(a, b)$ centre du cercle
 $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$ avec AB diamètre du cercle

V. Sphère

- Équation de sphère :
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ avec $\Omega(a, b, c)$ centre de la sphère