Produit scalaire et géométrie

Chapitre 6

I. Produit scalaire

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB), et K celui de B sur (AC). Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}$
$\vec{u}(x, y, z)\quad \vec{v}(x', y', z')\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ $\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

II. Droite

Équation paramétrique $(A(x_A, y_A, z_A) \in \mathcal{D})$	$\begin{cases} x = x_A + \lambda a \\ y = y_A + \lambda b \\ z = z_A + \lambda c \end{cases}$
Équation cartésienne	$ax + by + c = 0$
Vecteur normal	$\vec{n}(a, b)$
Vecteur directeur	$\vec{u}(-b, a)$
Distance au point M_0	$d(M_0, \mathcal{D}) = \frac{\lvert ax_0 + by_0 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

III. Plan

Équation paramétrique $A(x_A, y_A, z_A)\ ;\ \vec{u}(a, b, c)\ ;\ \vec{v}(a', b', c')$ $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$	$\begin{cases} x = x_A + \alpha a + \beta a' \\ y = y_A + \alpha b + \beta b' \\ z = z_A + \alpha c + \beta c' \end{cases}$
Équation cartésienne	$ax + by + cz + d = 0$
Vecteur normal	$\vec{n}(a, b, c)$
Distance au point M_0	$d(M_0, d) = \frac{\lvert ax_0 + by_0 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
Propriétés	$\mathcal{P} \perp \mathcal{P}' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{n'} = 0$ $\mathcal{D} \perp \mathcal{P}' \Leftrightarrow \mathcal{D} \perp$ à toute droite de ce plan

IV. Cercle

- <u>Équations de cercle :</u>
  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ $\quad$ *avec $\Omega(a, b)$ centre du cercle*
  $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_a)(y - y_B) = 0$ $\quad$ *avec AB diamètre du cercle*

V. Sphère

- <u>Équation de sphère :</u>
  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ $\quad$ *avec $\Omega(a, b, c)$ centre de la sphère*