

Les fonctions continues

M1 – Chapitre 2

I. Limites

Définitions			
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$		$a - r < x < a + r$	
$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$	$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 \mid \forall x \in I, \quad \begin{array}{l} a - r < x < a \\ a < x < a + r \\ A < x \\ x < -A \end{array}$	$a - r < x < a$	$ f(x) - l < \varepsilon$
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$		$a < x < a + r$	$f(x) < \varepsilon$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$		$A < x$	$f(x) > \varepsilon$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$		$x < -A$	

II. Continuité

$$f(x) \text{ continue en } a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$f(x)$ continue sur I si continue en tout point de I

III. Caractérisation séquentielle des limites

$$(x_n) \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a)$$

IV. Fonctions équivalentes

Définition	Propriété
$f \sim_a g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = 1$	$f'(a) \neq 0 \Rightarrow f(x) - f(a) \sim_a f'(a)(x - a)$

Equivalents usuels

$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$	$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$	$1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$
$\sin x \underset{0}{\sim} x$		$\tan x \underset{0}{\sim} x$

V. Limite d'une fonction monotone

f croissante sur $]a; b[$

- f majorée $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$
- f pas majorée $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$

VI. Image d'un intervalle

- f continue sur $I \Rightarrow f(I)$ est un intervalle
- f continue sur $[a; b] \Rightarrow f([a; b]) = [m; M] \quad m = \min_{[a; b]} f(x) \quad M = \max_{[a; b]} f(x)$

VII. Théorème des valeurs intermédiaires

f continue sur $I = [a; b]$
 $f(a) < 0$ et $f(b) > 0 \Rightarrow \exists c \in I$ t.q. $f(c) = 0$