

Corps des complexes – Trigonométrie

M2 – Chapitre 2

I. Complexes

1. Formules

$$\overline{\overline{z}} = z \quad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad \overline{zz'} = \overline{z} \overline{z'} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad |zz'| = |z||z'|$$

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2 \quad ||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

$$\sum_{k=0}^n z^k = 1 + z + \dots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \quad (z \neq 1)$$

2. Groupes et ensembles remarquables

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \quad (\mathbb{U}, \times) \text{ est un groupe commutatif}$$

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$$

$$\overline{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$$

II. Trigonométrie

1. Formules

$$\begin{array}{l} \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{array} \right.$$

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\begin{array}{l} \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ \sin 2a = 2 \sin a \cos a \end{array}$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad \left| \quad \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \quad \right| \quad \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\begin{array}{l} \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)] \\ \sin a \sin b = \frac{1}{2} [-\cos(a + b) + \cos(a - b)] \\ \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)] \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{array} \right.$$

$$t = \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \quad \left| \quad \sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \right| \quad \cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \left| \quad \tan \theta = \frac{2t}{1 - t^2} \right.$$

2. Morphisme de groupe

Soient (G, T) et (G', T') deux groupes, ϕ une application de G dans G' .
 ϕ est un morphisme de groupe $\Leftrightarrow \forall x, x' \in G, xTx' = \phi(x)T'\phi(x')$

Noyau de $\phi = \text{Ker } \phi = \phi^{-1}(e') = \{x \in G \mid \phi(x) = e_{G'}\}$
Image de $\phi = \text{Im } \phi = \phi(G) = \{x' \in G' \mid \forall x \in G, \phi(x) = x'\}$

3. Formules de Moivre et d'Euler, Binôme de Newton

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

III. Racines nièmes de l'unité

$$\mathbb{U}_n = \{z^n = 1 \mid z \in \mathbb{C}\} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0 ; n-1 \rrbracket \right\}$$

IV. Calculs trigonométriques courants

1. Développer $\cos(n\theta)$ en puissances de $\cos(\theta)$

1. $\cos(n\theta) = \frac{(e^{i\theta})^n + (e^{-i\theta})^n}{2}$ et développer les $e^{i\theta}$
2. Utiliser le binôme de Newton
3. Regrouper

2. Linéariser $\cos^n(\theta)$

1. $\cos^n \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^n$
2. Utiliser le binôme de Newton
3. Regrouper les termes conjugués
4. Retransformer en cos

3. Calculer $S_n = 1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta)$

1. $S_n = \text{Re}(1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + \dots + e^{in\theta}) = \text{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}\right)$
2. Factoriser par l'angle moitié pour simplifier