

I. Définitions

1. Polynôme de $\mathbb{K}[X]$

Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ (ensemble des polynômes de $\mathbb{K}$) est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang. Il se note $\sum_k a_k X^k$

2. Degré d'un polynôme

$P \neq 0 \Leftrightarrow d^\circ P = \text{rang du coefficient dominant}$
 $P = 0 \Leftrightarrow d^\circ P = -\infty$ (convention)

3. Polynôme unitaire

Un polynôme est unitaire si son coefficient dominant est 1.

II. Anneau des polynômes

1. Relation vis-à-vis du degré

$$\begin{aligned} d^\circ(P + Q) &= \text{Max}(d^\circ P ; d^\circ Q) \\ d^\circ(P \cdot Q) &= d^\circ P + d^\circ Q \end{aligned}$$

2. Régularité

$$PQ = PR \Leftrightarrow Q = R$$

3. Division euclidienne

Soient A et B deux polynômes ($B \neq 0$)

$\exists! (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$

$$A = BQ + R \quad d^\circ R < d^\circ B$$

4. Polynôme dérivé

$$\begin{aligned} \left(\sum_k a_k X^k \right)' &= \sum_{k \geq 1} k a_k X^{k-1} \\ (P + Q)' &= P' + Q' \\ (PQ)' &= P'Q + PQ' \end{aligned}$$

III. Racines d'un polynôme

1. Égalité de Taylor

$$P = \sum_k \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

2. Racines d'ordre m d'un polynôme

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et P polynôme

$$P \text{ factorisable par } (X - a)^m \Leftrightarrow P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$$

a est racine d'ordre m du polynôme quand $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$

IV. Décomposition / factorisation des polynômes

1. Définition du PGCD ($\wedge$)

Soient A et B deux polynômes non simultanément nuls.

$$\exists! P_0 \text{ polynôme unitaire t. q. } I = \{AU + BV\} = \{P_0 W\} = P_0 \mathbb{K}[X]$$

$$(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad W \in \mathbb{K}[X]$$

Donc :

- $\exists (U, V) \in \mathbb{K}[X] \text{ t. q. } AU + BV = P_0$
- P_0 est appelé PGCD de A et B
- $P_0 | A \text{ et } P_0 | B$
- $Q | A \text{ et } Q | B \Rightarrow Q | P_0$

2. Théorème de Bézout

$$A \text{ et } B \text{ premiers entre eux} \Leftrightarrow A \wedge B = 1 \Leftrightarrow AU + BV = 1$$

3. Théorème de Gauss

$$A | BC \text{ et } A \wedge B = 1 \Rightarrow A | C$$

4. Polynômes irréductibles

Soit P polynôme non constant

$$P \text{ irréductible} \Leftrightarrow \forall (A, B) \in \mathbb{K}[X]^2, P = AB \Rightarrow d^\circ A = 0 \text{ ou } d^\circ B = 0$$

$\Leftrightarrow P$ factorisable uniquement par des polynômes constants

- $P \in \mathbb{R}[X]$ irréductible $\Leftrightarrow d^\circ P = 1$ ou $d^\circ P = 2$ et $\Delta < 0$
- $P \in \mathbb{C}[X]$ irréductible $\Leftrightarrow d^\circ P = 1$
- Tout polynôme est produit de facteurs irréductibles

V. Définition et propriétés de $\mathbb{K}(X)$

$$(P, Q)R(P', Q') \Leftrightarrow PQ' = P'Q \quad \overline{(P, Q)} \text{ se note } \frac{P}{Q} \quad d^\circ \frac{P}{Q} = d^\circ P - d^\circ Q$$

Toute fraction admet une unique décomposition en E polynôme et F fraction de degré négatif :

$$\frac{P}{Q} = \underbrace{E}_{\in \mathbb{K}[X]} + \sum_{\substack{F \\ \in \mathbb{K}(X) \text{ et } d^\circ F < 0}}$$

VI. Décomposition polaire d'une fraction rationnelle

$$\frac{A}{\prod_{k=0}^n P_k} = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{P_k}$$

P_k premiers entre eux, A_k polynômes à déterminer

$$\frac{A}{P^n} = E + \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{P^k}$$

A_k polynômes à déterminer $d^\circ A_k < d^\circ P$