

I. Définitions

$$E \text{ e. v.} \Leftrightarrow \begin{cases} E \text{ ensemble} \\ + \text{ l. c. i de } E \text{ t. q. } (E, +) \text{ groupe commutatif} & (\forall (u, v) \in E^2, \quad u + v \in E, \quad 0 \in E) \\ \times \text{ l. c. e. de } (\mathbb{R}, E) \text{ dans } E & (\forall (\alpha, u) \in \mathbb{R} \times E, \quad \alpha u \in E) \end{cases}$$

$$F \text{ est s. e. v. de } E \Leftrightarrow \begin{cases} F \subset E \\ F \text{ est un e. v.} \end{cases}$$

II. Les combinaisons linéaires

1. Définition

$$\text{La c. l. de } v_1 \dots v_k \text{ avec les coefs } \alpha_1 \dots \alpha_k \text{ est : } \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$$

2. Espace engendré

L'espace engendré par les vecteurs $v_1 \dots v_k$ noté $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1 \dots v_k$. C'est un s. e. v. de E .

III. Les opérations sur les sous espaces vectoriels

Soient F, G deux s. e. v. de E

- $F \cup G$ pas s. e. v.
- $F \cap G$ s. e. v.

$$\begin{aligned} & \bullet F + G = \{s \in E \mid \exists (u, v) \in F \times G, \quad s = u + v\} \\ & \bullet F \oplus G = E \Leftrightarrow F \text{ et } G \text{ en somme directe} \Leftrightarrow \begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

IV. Familles

1. Définitions

Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_k)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \text{ est génératrice de } E & \Leftrightarrow \text{Tout vecteur de } E \text{ est c. l. de } \mathcal{F} & \Leftrightarrow \forall u \in E, u = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \\ \mathcal{F} \text{ est libre} & \Leftrightarrow \text{Une c. l. nulle de } \mathcal{F} \text{ a des coefs nuls} & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{F} \text{ est liée} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ non libre}$$

2. Propriétés

Soient $\mathcal{F}$ une famille, $\mathcal{L}$ une famille libre, $\mathcal{G}$ une famille génératrice

- $\mathcal{F}$ libre et génératrice de $E \Leftrightarrow \mathcal{F}$ base de E
- $\mathcal{F} \subset \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{F}$ libre
- $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}$ génératrice

V. Dimension d'un espace vectoriel

1. Définition

Si E peut être engendrée par un nombre fini de vecteurs, alors deux bases de E ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre est la dimension de E .

2. Propriétés

Soient E un e.v. tel que $\dim E = n$,
 $\mathcal{L} = (e_1, \dots, e_l)$ famille libre, $\mathcal{G} = (e_1, \dots, e_g)$ famille génératrice

- Une famille libre à au plus n éléments
- Une famille génératrice a au moins n éléments
- Une famille libre ou génératrice de n éléments est une base

$$\begin{array}{l} l \leq n \\ g \geq n \\ l = g = n \Rightarrow \text{base} \end{array}$$

3. Théorème de la base incomplète

$\left. \begin{array}{l} \dim E = n \\ \mathcal{F} = (e_1, \dots, e_l) \text{ libre} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{On peut compléter } \mathcal{F} \text{ pour avoir une base de } E \\ \text{On complète } \mathcal{F} \text{ avec } \mathcal{F}' = (e_{l+1}, \dots, e_n) \end{array}$

Propriétés :

- $\dim \mathcal{F} = l$
- $\dim \mathcal{F}' = n - l$
- $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' = \{0\}$
- $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}' = E$ $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont supplémentaires

4. Autres propriétés

$$\left. \begin{array}{l} F \subset E \\ \dim F = \dim E \end{array} \right\} \Rightarrow F = E$$

$$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$$