# Les déterminants

M4 – Chapitre 4

## I. Définition

$$\det_{\mathcal{B}} : \begin{array}{ccc} E^n & \to & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle \mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)} & & \\ (v_1,\dots,v_n) & \to & det_{\mathcal{B}}(v_1,\dots,v_n) \end{array}$$

## II. Propriétés

- *det* est antisymétrique $\det(\dots,u_i,\dots,u_j,\dots) = -\det(\dots,u_j,\dots,u_i,\dots)$
- *det* est linéaire en chaque variable $\det(\dots,u+\alpha v,\dots) = \det(\dots,u,\dots) + \alpha\, det(\dots,v,\dots)$

- $\boxed{\det(u_1,\dots,u_n) = 0 \Leftrightarrow (u_1,\dots,u_n) \text{ liée}}$

## III. Calcul de $\det(u_1,\dots,u_n)$

### 1. Dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

### 2. Dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - zy'x'' - xz'y'' - yx'z''$$

### 3. Avec une matrice diagonale

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & x \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_n \end{vmatrix} = a_1 \dots a_n$$

# IV. Règles de calcul

## 1. Opérations sur les colonnes et les lignes

On ne change pas la valeur d'un déterminant si on ajoute ou soustrait à une colonne ou une ligne donnée une combinaison linéaire des autres colonnes ou ligne.

Quand on multiplie une colonne par $\alpha$, on doit diviser le déterminant par $\alpha$.

## 2. Méthode de Cramer

$$M = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \qquad D = \det M \qquad \text{On cherche a résoudre } \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & \cdot & \cdot \\ b & \cdot & \cdot \\ c & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{D} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} \cdot & a & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & c & \cdot \end{vmatrix}}{D} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & a \\ \cdot & \cdot & b \\ \cdot & \cdot & c \end{vmatrix}}{D}$$

## 3. Développement de déterminant

La méthode de calcul est la suivante :

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} e & h \\ f & i \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} b & h \\ c & i \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Cette méthode ici appliquée à la 1ère ligne peut être appliquée à n'importe quelle ligne ou colonne.