

I. Equations du 1^{er} degré

1. Solution générale

$$y' + ay = b$$

$$y = \underbrace{y_H}_{\text{solution homogène}} + \underbrace{y_P}_{\text{solution particulière}}$$

2. Solution homogène

$$y'_H + ay_H = 0 \Leftrightarrow y_H = ke^{-\int a}$$

3. Solution particulière : méthode de la variation de la constante

On pose $y = y_0 C$ avec y_0 une des solutions homogènes et $C = C(t)$ fonction.

$$\begin{aligned} y &= y_0 C & y' &= y'_0 C + y_0 C' \\ \underbrace{y' + ay}_{=b} &= \underbrace{(y'_0 + ay_0)}_{=0} C + y_0 C' \\ C' &= \frac{b}{y_0} \Leftrightarrow C = \int \frac{b}{y_0} dt \Leftrightarrow C = C_0 + k \end{aligned}$$

$$y = (C_0 + k)y_0 \quad C_0 = \int \frac{b}{y_0} \quad y_0 = e^{-\int a}$$

Equations différentielles

M5 – Chapitre 1

II. Equations du 2nd degré

1. Solution générale

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

$$y = \underbrace{y_H}_{\text{solution homogène}} + \underbrace{y_P}_{\text{solution particulière}}$$

2. Solution homogène

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (Ec)$$

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$r = \alpha \pm i\beta$	$r = -\frac{b}{2a}$	$r = -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$y_H = (A \cos \beta t + B \sin \beta t)e^{\alpha t}$	$y_H = (At + B)e^{rt}$	$y_H = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

3. Solution particulière

a. Si $f(t) = P_0(t)e^{\lambda t}$

$$y_P = Q(t)e^{\lambda t}$$

λ pas solution de (Ec)	λ solution simple de (Ec)	λ solution double de (Ec)
$d^\circ Q = d^\circ P_0$	$d^\circ Q = d^\circ P_0 + 1$	$d^\circ Q = d^\circ P_0 + 2$

Puis remplacer y_P dans l'équation différentielle pour déterminer les coefficients du polynôme $Q(t)$.

b. Sinon méthode de la variation de la constante

On cherche $y_P = Ay_1 + By_2$ avec y_1, y_2 solutions de l'équation homogène (à identifier avec l'équation homogène précédemment calculée) et A et B fonctions. On posera également pour les calculs $A'y_1 + B'y_2 = 0$.

$$\begin{aligned} y_P &= Ay_1 + By_2 & y'_P &= Ay'_1 + By'_2 & y''_P &= A'y'_1 + Ay''_1 + B'y'_2 + By''_2 \\ \underbrace{ay''_P + by'_P + cy_P}_{=f(t)} &= A \underbrace{[ay''_1 + by'_1 + cy_1]}_{=0} + B \underbrace{[ay''_2 + by'_2 + cy_2]}_{=0} + A'y'_1 + B'y'_2 \end{aligned}$$

$$\underline{A'y'_1 + B'y'_2 = f(t) \text{ et } A'y_1 + B'y_2 = 0}$$

$$A' = -B'y_2 \frac{y'_1}{y_1} \Rightarrow -B'y_2 \frac{y'_1}{y_1} + B'y'_2 = f(t)$$

$$B' \left[y'_2 - y_2 \frac{y'_1}{y_1} \right] = f(t)$$

$$\text{On calcule } B', B \text{ puis } A \text{ avec } A' = -B'y_2 \frac{y'_1}{y_1}$$