

Les fonctions de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$

M5 – Chapitre 2

I. Les fonctions de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$)

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \quad \underline{f'(t) = \begin{pmatrix} f'_1(t) \\ \vdots \\ f'_n(t) \end{pmatrix}}$$

II. Les fonctions de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$)

1. Ligne de niveau

$$\text{Ligne de niveau "a"} = \mathcal{C}_a = \{M \in \mathbb{R}^n \mid f(M) = a\}$$

2. Gradient

a. Définition

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} & (h = x - a) \\ \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h} & (h = y - b) \end{aligned}$$

b. Application à la tangente

Soit T_A tangente (droite, plan, ...) à f en $A(\alpha, \beta, \gamma)$

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}_A f \text{ vecteur normal à } T_A} \quad \underline{T_A : \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \\ z - \gamma \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_A f = 0}$$

III. Les fonctions de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$)

1. Dérivée directionnelle

a. Définition

$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, la dérivée de f dans la direction $\vec{v}$ est $\underline{df_{M_0}(\vec{v})}$

b. Théorème

Soit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ $\underline{g'(0) = df_{M_0}(\vec{v}) = \text{dérivée directionnelle}}$
 $t \rightarrow f(M_0 + t\vec{v})$

2. Dérivée partielle

a. Définition

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, $\underline{\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) = df_{M_0}(e_i) = \text{dérivée directionnelle selon } e_i}$

b. Conséquence

$$\text{Donc } \boxed{df_{M_0}(\vec{H}) = \vec{H} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_{M_0} f} = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)$$

3. Différentielle

a. Définition

Si f admet un $DL_1(M_0)$, alors f différentiable en M_0 , et on a :

$$f(M_0 + \vec{H}) = \underbrace{f(M_0)}_{DL_0} + \underbrace{df_{M_0}(\vec{H})}_{\text{approx. linéaire}} + \underbrace{\|\vec{H}\| \varepsilon(\vec{H})}_{\text{erreur}}$$

- $df_{M_0}(\vec{H}) = \vec{H} \cdot \overrightarrow{\text{grad}_{M_0} f}$
- $\varepsilon(\vec{H}) \xrightarrow[0_n]{} 0_p$
- $\|\vec{H}\| \varepsilon(\vec{H}) \ll \vec{H}$

b. Application au calcul du $DL_1(x_0, y_0)$ d'une fonction de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

C'est $f(x, y) = f(M_0 + \vec{H})$ avec $M_0 = (x_0, y_0)$ et $\vec{H} = ((x - x_0), (y - y_0))$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) + \|(x - x_0), (y - y_0)\|_2 \varepsilon(x, y)$$

4. Matrices jacobiennes

a. Définition

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$H \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \rightarrow (f_1(H), \dots, f_p(H))$$

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \partial f_1 \\ \vdots \\ \leftarrow \partial f_p \end{matrix}$$

b. Composées d'applications

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

$$d(g \circ f)(x_0) = dg_{f(x_0)} \circ df_{x_0}$$

$$J_{g \circ f} = J_{g(f(x))} \cdot J_f$$