

I. Théorème de Schwarz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Pour une fonction p fois dérivable et dont les dérivées partielles à l'ordre p sont continues, l'ordre de dérivation n'importe pas.

II. Formes différentielles

$\omega = P_1 dx_1 + \dots + P_n dx_n$ est une forme différentielle

1. Formes exactes (différentielles totales) et fermées

$$\omega \text{ exacte} \Leftrightarrow \exists U \mid \omega = dU$$

$$\omega \text{ fermé} \Leftrightarrow \forall (i, j) \quad \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i} \quad (\text{Maxwell})$$

Théorème de Pointcarré : Dans R^n , $\omega \text{ exacte} \Leftrightarrow \omega \text{ fermée}$

2. Calcul d'intégrales curvilignes

a. Cas général

Pour calculer $\int_{A,\gamma}^B \omega$, on paramétrise γ .

$$dx_i = \dot{x}_i(t) dt \quad P_i = P_i(x_1, \dots, x_n) = P_i(t) \quad \omega = \sum_{i=1}^n P_i dx_i = \left[\sum_{i=1}^n P_i \dot{x}_i(t) \right] dt$$

$$\int_{A,\gamma}^B \omega = \int_{t_i}^{t_f} \left[\sum_{i=1}^n P_i \dot{x}_i(t) \right] dt$$

b. Cas d'une différentielle exacte

Si ω est une différentielle exacte de primitive U , alors $\int_{A,\gamma}^B \omega$ ne dépend pas du chemin suivi. Donc :

$$\int_{A,\gamma}^B \omega = U(B) - U(A)$$

c. Calcul du travail d'une force

$$W_{A \rightarrow B, \gamma}(F) = \int_{A,\gamma}^B \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{dl}}_{=\omega} = \int_{t_A, \gamma}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{\gamma} dt \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$$

3. Théorème de synthèse

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(U) \Leftrightarrow \vec{F} \text{ conservatif} \Leftrightarrow \text{Maxwell vérifié}$$
$$\vec{F} \cdot \vec{dl} \text{ différentielle exacte} \quad \vec{F} \cdot \vec{dl} \text{ différentielle fermée}$$

III. Extremum local

1. Définition

$$A(\alpha, \beta) \text{ point critique de } f \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

2. Théorème de Monge

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\Delta = s^2 - rt$$

• $\Delta < 0$	$r > 0$	Minimum local
	$r < 0$	Maximum local
• $\Delta > 0$		Point col ou selle
• $\Delta = 0$		On ne peut pas conclure

IV. Equations de dérivées partielles

On cherche à se ramener à $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow f(x, y) = c(y)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow f(x, y) = c(x)$ $c \in \mathcal{C}^1$

1. Changement de fonction

On peut faire un « changement de fonction » en exprimant f en fonction de g .

On calcule les dérivées partielles de f en fonction de celles de g , on les remplace dans l'équation et on calcule g . On en déduit f .

$$\left(\text{ex : } g = \frac{f+x}{y} \Rightarrow g = c(y) \Rightarrow f = y \cdot c(y) - x \quad c \in \mathcal{C}^1 \right)$$

2. Changement de variable

On peut faire un changement de variable. $f(x, y) = g(u, v) = g \circ \underbrace{\varphi(x, y)}_{=(u, v)}$

On calcule les dérivées partielles de f en fonction de celles de g , on les remplace dans l'équation et on calcule g . On en déduit f .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\left(\text{Ex : } \begin{matrix} u = x \\ v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \frac{\partial g}{\partial v} \end{matrix} \right) \Rightarrow g(u, v) = c(v) \Rightarrow f(x, y) = c\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

V. Intégration double

1. Définition

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{c} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{array} \right\}$$

$$\boxed{\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{x=a}^b \left[\int_{y=y_1}^{y_2} f(x, y) \, dy \right] dx}$$

2. Théorème de Fubini

$$I_{x,y}(f) = I_{y,x}(f)$$

3. Théorème de Green-Riemann

$\mathcal{D}$ domaine entouré par une courbe fermée γ parcourue dans le sens trigonométrique, $F = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy}$$

VI. Rotationnel et divergence (dans $\mathbb{R}^3$)

1. Définition

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{Div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}} \quad \boxed{\text{Rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}}$$

2. Forme d'Ostrogradski

γ : courbe fermée S : surface s'appuyant sur γ $\vec{n}$: vecteur normal à S ϕ : flux

$$\boxed{\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \phi = \iint_S \text{Rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}} \quad \text{avec} \quad d\vec{S} = dS \times \vec{n}$$