Résumé de probabilités

M3 - Résumé

I. Probabilités

1. Formule de Poincaré

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{\substack{i_1 \dots i_k \\ 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n}} P\left(\bigcap_{j=i_1}^{i_k} A_j\right) \right)$$

2. Probabilités conditionnelles

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

3. Probabilités composées

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P_{\bigcap_{j=1}^{i-1} A_j}(A_i)$$

4. Formule de Bayes

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i)\, P_{A_i}(B)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\, P_{A_j}(B)}$$

5. Probabilités totales

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P_{A_i}(B)$$

II. Variable aléatoire

1. Esperance

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, P(X = x_i)$$

Théorème de transfert

$$E(g \circ X) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\, P(X = x_i)$$

Propriétés

- $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$
- $E(aX + b) = aE(X) + b$

2. Variance et écart type

$$V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$ Formule de Koenig-Huygens

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Propriétés

- $V(aX + b) = a^2 V(X)$
- $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$
- $V(X) = 0 \Leftrightarrow P\big(X = E(X)\big) = 1$
- X^* centrée $(E = 0)$ réduite $(V = 1)$:

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

III. Couples de variables aléatoires

$$\boxed{P\big((X,Y)=(x_i,y_j)\big)=P\big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\big)}$$

$$\left.\begin{array}{c}X\hookrightarrow\mathcal{B}(n_1,p)\\Y\hookrightarrow\mathcal{B}(n_2,p)\\X,Y\text{ indep}\end{array}\right\}\Rightarrow Z\hookrightarrow\mathcal{B}(n_1+n_2,p)$$

$$\boxed{P(X+Y=z)=\sum_i P(X=x_i)\,P_{(X=x_i)}(Y=z-x_i)}$$

$$\left.\begin{array}{c}X\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda_1)\\Y\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda_2)\\X,Y\text{ indep}\end{array}\right\}\Rightarrow Z\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$$

1. Espérance de $f(X,Y)$

$$\boxed{E\big(f(X,Y)\big)=\sum_{i,j}f(x_i,y_j)\,P\big((X,Y)=(x_i,y_j)\big)}$$

Propriétés :

- $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$
- X,Y indep $\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$

2. Covariance

$$\boxed{cov(X,Y)=E\Big(\big(X-E(X)\big),\big(Y-E(Y)\big)\Big)}$$

Propriétés :

- $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
- $cov(X,X)=V(X)$
- $cov(X,Y)=cov(Y,X)$
- $cov(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2,Y)$
  $=\lambda_1\,cov(X_1,Y)+\lambda_2\,cov(X_2,Y)$

3. Variance

$$\boxed{V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\,cov(X,Y)}$$

$$V\Big(\sum X_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}V(X_i)+2\sum_{\substack{i,j\\1\le i<j}}cov(X_i,X_j)$$

4. Coef. de corrélation linéaire

$$\boxed{\rho_{X,Y}=\frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}}\quad|\rho_{X,Y}|\le 1$$

Propriétés :

- $|\rho_{X,Y}|=1\Leftrightarrow X$ p.s. expression linéaire de Y
- $|\rho_{X,Y}|=0\Leftrightarrow X,Y$ non corrélés

IV. Les variables aléatoires à densité

$$X\text{ v. a. a densité de densité }f(t)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}F_X\text{ continue sur }\mathbb{R}\\F_X\text{ de classe }\mathcal{C}^1<\text{ sur }\mathbb{R}\\\text{(sauf en un nbr fini de pts)}\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt=1\\f\ge 0\end{cases}$$

Fonction de répartion : $F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$ $\qquad F_X=\int f$

1. Somme de deux variables aléatoires à densité

X de densité f
Y de densité g
X,Y indep.

$Z=X+Y$ a une densité $\boxed{h(x)=f*g=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)\,dt}$

avec $*$ produit de convolution

2. Espérance (si elle existe)

$$\boxed{E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}t\,f(t)\,dt}$$

$$\boxed{E\big(g(X)\big)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,f(t)\,dt}$$

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

3. Variance

$$V(X)=E\big(X-E^2(X)\big)$$
$$V=E(X^2)-E^2(X)$$

$$\sigma=\sqrt{V(X)}$$