

I. Variable aléatoire

1. Définition

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow A \subset \mathbb{R} & (X = a) &= \{\omega \in \Omega, X(\omega) = a\} = X^{-1}(\{a\}) & X(\Omega) &= A \\ \omega &\rightarrow X(\omega) \end{aligned}$$

2. Loi de probabilité d'une VA

$$\begin{aligned} P_X : X(\omega) &\rightarrow [0,1] & P_X(x) &= P(X = x) \\ x &\rightarrow P(X = x) \end{aligned}$$

3. Esperance

a. Définition

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

b. Théorème de transfert

$$E(g \circ X) = \sum_{i=1}^n g(x_i) P(X = x_i)$$

c. Propriétés

- $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$
- $E(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = 0) = 1$ (VA centrée)
- $E(aX + b) = aE(X) + b$

4. Variance et écart type

a. Définition

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad \text{Formule de Koenig-Huygens}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

b. Propriétés

- $V(aX + b) = a^2 V(X)$
- $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$
- $V(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = E(X)) = 1$
- X^* centrée ($E = 0$) réduite ($V = 1$) : $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$

5. Fonction de répartition

a. Définition

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow P(X \leq x) \end{aligned}$$

b. Propriétés

F_X est croissante continue à droite $\forall x$ continue à gauche $\forall x \mid P(X = x) \neq 0$

$$\underline{P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})}$$

II. Loi discrète usuelle

1. Loi de Bernoulli

Soit X v.a. $X(\Omega) = \{0; 1\}$ $P(X = 1) = p$ $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$

$$X = 1_{[0; p]} \circ U$$