

Les couples de variables aléatoires discrètes

M3 – Chapitre 3

On a $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$ $i \in I$ $j \in J$

I. Définitions

1. Loi conjointe de (X, Y)

$$\forall (i, j) \quad P((X, Y) = (x_i, y_j)) = P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

2. Lois marginales

$$P(X = x_i) = \sum_j P((X, Y) = (x_i, y_j)) \quad P(Y = y_j) = \sum_i P((X, Y) = (x_i, y_j))$$

3. Indépendance

$$(X, Y) \text{ indépendantes} \Leftrightarrow P((X, Y) = (x_i, y_j)) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

II. Loi d'une fonction de variables aléatoires

1. Loi de $Z = X + Y$

$$(X + Y = z) = \bigcup_i (X = x_i) \cap (Y = z - x_i) \Rightarrow P(X + Y = z) = \sum_i P(X = x_i) P_{(X=x_i)}(Y = z - x_i)$$

2. Cas particuliers

$$\left. \begin{array}{l} X \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p) \\ Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p) \\ X, Y \text{ indep} \end{array} \right\} \Rightarrow Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p) \quad \left. \begin{array}{l} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1) \\ Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2) \\ X, Y \text{ indep} \end{array} \right\} \Rightarrow Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

III. Espérance de $f(X, Y)$

1. Définition

$$E(f(X, Y)) = \sum_{i,j} f(x_i, y_j) P((X, Y) = (x_i, y_j))$$

2. Propriétés

- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- $X, Y \text{ indep} \Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

IV. Covariance

1. Définition

$$\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

2. Propriétés

- $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- $\text{cov}(X, X) = V(X)$
- $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$
- $\text{cov}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = \lambda_1 \text{cov}(X_1, Y) + \lambda_2 \text{cov}(X_2, Y)$

V. Variance

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{cov}(X, Y)$$

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$$

VI. Coefficient de corrélation linéaire

1. Définition

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

2. Propriétés

- $|\rho_{X,Y}| \leq 1$
- $|\rho_{X,Y}| = 1 \Leftrightarrow X$ presque sûrement expression linéaire de Y
- $|\rho_{X,Y}| = 0 \Leftrightarrow X, Y$ non corrélés