

Les variables aléatoires à densité

M3 – Chapitre 4

I. Définition

$$X \text{ v.a. à densité de densité } f(t) \Leftrightarrow \begin{cases} F_X \text{ continue sur } \mathbb{R} \\ F_X \text{ de classe } \mathcal{C}^1 < \text{ sur } \mathbb{R} \\ \text{(sauf en un nbr fini de pts)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1 \\ f \geq 0 \end{cases}$$

II. Fonction de répartition

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad F_X = \int f$$

Note : Pour les variables à densité, $< \Leftrightarrow \leq$ et $> \Leftrightarrow \geq$

III. Changement de variable aléatoire

$$Y = g(X) \text{ a une densité } \Leftrightarrow \begin{cases} F_Y \text{ continue sur } \mathbb{R} \\ F_Y \text{ de classe } \mathcal{C}^1 < \text{ sur } \mathbb{R} \\ \text{(sauf en un nbr fini de pts)} \end{cases}$$

IV. Somme de deux variables aléatoires à densité

X de densité f
 Y de densité g
 X, Y indep.

$Z = X + Y$ a une densité

$$h(x) = f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$$

avec * produit de convolution

V. Espérance

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt \quad (\text{si elle existe})$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) dt \quad E(aX + b) = aE(X) + b$$

VI. Variance

$$V(X) = E(X - E^2(X)) = E(X^2) - E^2(X) \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{V(X)}$$

VII. Lois usuelles

1. Loi uniforme

$$X \hookrightarrow U_{[a;b]}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [a; b] \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

2. Loi exponentielle

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3. Loi sans mémoire ou loi de vieillissement

X suit une loi sans mémoire si $\begin{cases} X \geq 0 \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+2} \quad P(X > x + y) = P(X > x)P(X > y) \end{cases}$

X suit une loi sans mémoire $\Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ \text{ou} \\ X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \end{cases}$

Remarque :

Si $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad P(X > x) > 0 \Rightarrow P_{(X > x)}(X > x + y) = P(X > y)$