

I. Vocabulaire

$(a_n)_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq n_0}}$ Suite

$\sum_{n \geq n_0} a_n$ Série

$S_n = \sum_{k=n_0}^n a_k$ Somme partielle

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ Somme totale

II. Séries arithmétiques et géométriques

$$\sum_{n \geq n_0} u_n \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Arithmétique	Géométrique
<p>Une série arithmétique de raison $r \neq 0$ est toujours divergente.</p> $S_n = \frac{(a_{n_0} + a_n) \times nb_{termes}}{2}$	<p>$\sum_{n \geq n_0} u_n$ série géo t. q. $q \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$ converge $\Leftrightarrow q < 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$</p> $S_n = \frac{U_{n_0} - U_{n+1}}{1 - q}$ $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \frac{u_{n_0}}{1 - q}$

III. Série à termes positifs (STP)

Une STP converge $\Leftrightarrow$ la suite des sommes partielles est majorée.

1. Théorème de comparaison

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ STP

$$\begin{array}{l} \underline{a_n \leq b_n :} \\ \sum b_n \text{ conv} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv} \\ \sum a_n \text{ div} \Rightarrow \sum b_n \text{ div} \end{array}$$

$$\underline{a_n \sim b_n :} \\ \sum a_n \text{ et } \sum b_n \text{ simultanément conv ou div}$$

2. Séries de Riemann

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$	$1 < \alpha \Rightarrow$ série converge
	$0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow$ série diverge

Conséquence :

Soit $\sum u_n$ STP	$\alpha > 1 \quad \lim n^\alpha u_n = l < +\infty \Rightarrow$ série converge
	$\alpha \leq 1 \quad \lim n^\alpha u_n = l > 0 \Rightarrow$ série diverge

3. Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ STP	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow$ série converge
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow$ série diverge

4. Comparaison entre séries et intégrales

Soit $\sum_{n \geq n_0} a_n$ STP $a_n = f(n)$ $F(x) = \int f(x)$

- $a_1 + \int_1^n f(x)dx \geq S_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx$
- $\sum_{n \geq n_0} a_n$ conv $\Leftrightarrow F$ majorée

IV. Séries générales

1. Séries absolument convergentes

$$\sum |u_n| \text{ convergente} \Rightarrow \sum u_n \text{ absolument convergente} \Rightarrow \sum u_n \text{ convergente}$$

2. Théorème

$$\sum u_n \text{ abs conv} \quad u_n \leq Aq^n \quad q \in]0; 1[\Rightarrow \left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n \right| \leq \frac{Aq^{n+1}}{1-q}$$

3. Les séries alternées de Leibniz

$$\sum_{n \geq n_0} (-1)^n a_n \quad (a_n) > 0 \searrow \rightarrow 0 \Rightarrow \text{convergentes} \quad | \quad S_{2n} \searrow \quad | \quad S_{2n+1} \nearrow$$

$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$	converge	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$
$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$	converge	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$