

Séries numériques et intégrales généralisée

M6 – Chapitres 1 et 2

Théorèmes (Pour STP ou $f > 0$ sauf définition et absolue conv.)	Séries numériques	Intégrales généralisés	
		$\int_a^{+\infty} f(t)dt$	$\int_a^b f(t)dt$
Définition	$\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ Une STP conv $\Leftrightarrow$ suite des (S_n) majorée.	$\int_a^b f(t)dt$ conv $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt \in \mathbb{R}$	
Théorème de comparaison	$\begin{array}{l} \underline{a_n \leq b_n :} \\ \sum b_n \text{ conv} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv} \\ \sum a_n \text{ div} \Rightarrow \sum b_n \text{ div} \\ \underline{a_n \sim_{+\infty} b_n :} \\ \sum a_n \text{ et } \sum b_n \text{ sim. conv ou div} \end{array}$	$\begin{array}{l} \underline{f \leq g :} \\ \int_a^b g \text{ conv} \Rightarrow \int_a^b f \text{ conv} \\ \int_a^b f \text{ div} \Rightarrow \int_a^b g \text{ div} \\ \underline{f \sim_b g :} \\ \int_a^b g \text{ et } \int_a^b f \text{ sim. conv ou div} \end{array}$	
Riemann Règle n^α et t^α	$\sum \frac{1}{n^\alpha} \quad \begin{array}{l} \alpha > 1 \quad \lim n^\alpha u_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{conv} \\ \alpha \leq 1 \quad \lim n^\alpha u_n > 0 \Rightarrow \text{div} \end{array}$	$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \quad \begin{array}{l} \alpha > 1 \quad \lim t^\alpha f \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{conv} \\ \alpha \leq 1 \quad \lim t^\alpha f > 0 \Rightarrow \text{div} \end{array}$	$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \quad \begin{array}{l} \alpha < 1 \quad \lim (t-b)^\alpha f \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{conv} \\ \alpha \geq 1 \quad \lim (t-b)^\alpha f > 0 \Rightarrow \text{div} \end{array}$
Critère de d'Alembert	$\begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow \text{conv} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow \text{div} \end{array}$		
Absolue convergence	$\sum u_n \text{ cv} \Rightarrow \sum u_n \text{ abs cv} \Rightarrow \sum u_n \text{ cv}$	$\int_a^b f \text{ conv} \Rightarrow \int_a^b f \text{ abs conv} \Rightarrow \int_a^b f \text{ conv}$	
Leibniz	$\begin{array}{l} \sum (-1)^n a_n \quad (a_n) > 0 \searrow \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \text{conv} \quad \quad S_{2n} \searrow \quad \quad S_{2n+1} \nearrow \end{array}$		

Compléments sur les séries

1. Séries arithmétiques et géométriques

Arithmétique	Géométrie
<p>Une série arithmétique de raison $r \neq 0$ est toujours divergente.</p> $S_n = \frac{(a_{n_0} + a_n) \times nb_{termes}}{2}$	$\sum_{n \geq n_0} u_n \text{ série géo converge } \Leftrightarrow q < 1$ $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ $S_n = \frac{U_{n_0} - U_{n+1}}{1 - q}$ $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \frac{u_{n_0}}{1 - q}$

2. Comparaison séries et intégrales

$$\text{Soit } \sum_{n \geq n_0} a_n \text{ STP } \quad a_n = f(n) \quad F(x) = \int f(x)$$

- $a_1 + \int_1^n f(x)dx \geq S_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx$
- $\sum_{n \geq n_0} a_n \text{ conv } \Leftrightarrow F \text{ majorée}$

3. Approximation de la somme totale

$$\sum u_n \text{ abs conv } \quad u_n \leq Aq^n \quad q \in]0; 1[\Rightarrow |S - S_n| \leq \frac{Aq^{n+1}}{1 - q}$$