

Les séries de fonctions

M6 – Chapitre 3

Soient $J \subset I = [a; b] \subset \mathbb{R}$ $x \in I$ $f_n : I \rightarrow \mathbb{C}$ $S_n = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ $S = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$

Convergence sur I	Suite de fonctions	Séries de fonctions
Simple $\Uparrow$	$f_n \xrightarrow{C.S.} l$ $\Leftrightarrow \forall x \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = l(x)}$	$\sum f_n \xrightarrow{C.S.} S$ $\Leftrightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S}$
Uniforme $\Uparrow$	$f_n \xrightarrow{C.U.} l$ $\Leftrightarrow \boxed{\ f_n - l\ _\infty \rightarrow 0}$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f_n(x) - l(x) \leq \varepsilon$	$\sum f_n \xrightarrow{C.U.} S$ $\Leftrightarrow \boxed{\ S_n - S\ _\infty \rightarrow 0}$
Normale		$\sum f_n \xrightarrow{C.N.} S$ $\Leftrightarrow \boxed{\sum \ f_n\ _\infty \text{ converge}} \text{ vers } S$ $\Leftrightarrow \boxed{\exists \alpha_n \geq f_n \text{ t.q. } \sum \alpha_n \text{ converge}}$
Théorèmes		
Continuité	$f_n \xrightarrow{C.S.} l$ f_n cont. et der. $\Rightarrow l$ non cont. $f_n \xrightarrow{C.U.} l$ f_n continue $\Rightarrow l$ continue	$\sum f_n \xrightarrow{C.S.} S$ f_n continue $\Rightarrow S$ continue
Intégration	$f_n \xrightarrow{C.U.} l$ $\Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n(x) = \int_a^x \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}_{=l}}$	$\sum f_n \xrightarrow{C.U.} S$ $\Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x S_n = \int_a^x \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n}_{=S}}$
Dérivation		$\left. \begin{array}{l} f_n \in \mathcal{C}^1 \\ \sum f_n \text{ C.S. sur } I \\ \sum f'_n \text{ C.U. sur } J \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n}$

Remarques sur la norme infinie

$$\boxed{\|f(x)\|_\infty^I = \sup |f(x)|}$$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda f\|_\infty^I = |\lambda| \|f\|_\infty^I$
- $\forall (f, g) \in B(I)^2 \quad \|f + g\|_\infty^I \leq \|f\|_\infty^I + \|g\|_\infty^I$