Les séries entières

M6 – Chapitre 4

I. Définition

Une série entière est une série de la forme $\boxed{\sum a_n z^n}$ $z \in \mathbb{C}$

II. Rayon de convergence

1. Théorème

$|a_n r^n|$ suite bornée $\Rightarrow$ $\forall \rho \in [0,r]$ $\sum a_n \rho^n$ C.N. sur $\mathcal{D}(O,r)$

2. Définition

R est le plus grand nombre tel que $|a_n r^n|$ soit bornée.
Si $|a_n r^n|$ bornée $\forall r \in \mathbb{R}$, $R = +\infty$

3. Critère de d'Alembert

Si $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R}^+ \quad \begin{cases} l > 0 \Rightarrow R = \frac{1}{l} \\ l = 0 \Rightarrow R = +\infty \end{cases}}$

III. Opérations sur les séries entières

1. Opérations simples

Des séries entières de même rayon s'ajoutent et se multiplient pour donner des séries entières de même rayon.

2. Dérivation

a. Théorème

$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n z^n)'}$ et ont même rayon de conv

b. Corollaire

$$\text{Soit } S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

- $S(z)$ dérivable une infinité de fois
- $S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n\, z^{n-k} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(q+k)!}{q!}\, a_{q+k}\, z^q$ est une série entière
- $\boxed{S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!}\, z^n}$