

Flexion plane simple

P9-12 – Chapitre 6

I. Définition

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & m_{fz} \end{pmatrix}}_{\text{Flexion pure}} = \underbrace{\begin{pmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & m_{fz} \end{pmatrix}}_{\text{Flexion plane}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & m_{fz} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Flexion plane} \\ \text{simple}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_y & m_{fy} \\ T_z & m_{fz} \end{pmatrix}}_{\text{Flexion dérivée}}$$

II. Déformations (flexion plane simple suivant l'axe y)

$$\boxed{\frac{\Delta l}{l} = \underbrace{\lambda}_{>0} y} \quad \begin{cases} y < 0 \Rightarrow \text{zone de traction} \\ y = 0 \Rightarrow \text{pas de variation de longueur la ligne moyenne } (\Delta l = 0) \\ y > 0 \Rightarrow \text{zone de compression} \end{cases}$$

III. Contraintes (flexion plane simple suivant l'axe y)

$$\sigma = ay \quad d\vec{f}_x = \sigma dS \vec{x} \quad dm_{fz} = \|\vec{GM} \wedge d\vec{f}_x\| = -ay^2 dS$$

$$\boxed{\sigma = -\frac{m_{fz}}{I_{Gz}} y} \quad \text{et} \quad \boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}} \quad \left(\text{Si déformation selon } z : \sigma = \frac{m_{fy}}{I_{Gy}} z \right)$$

IV. Principe de superposition

$$\boxed{\sigma = -\frac{m_{fz}}{I_{Gz}} y + \frac{m_{fy}}{I_{Gy}} z + \frac{N}{S}}$$

V. Conditions aux limites

- Encastrement : $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
- Appuis simples : $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$

VI. Etude de la déformée

1. Flexion plane simple

$$\begin{cases} EI_{Gz} y'' = m_{fz} \\ EI_{Gy} z'' = m_{fy} \end{cases}$$

2. Flexion plane dérivée

$$\begin{cases} EI_{Gz} y'' + EI_{Gyz} z'' = m_{fz} \\ EI_{Gy} z'' + EI_{Gyz} y'' = m_{fy} \end{cases}$$

VII. Moments quadratiques

1. Formules

$$\boxed{I_G = \int_S \rho^2 dS} \quad \text{moment quadratique polaire (mm}^4\text{)} \quad \boxed{I_{Gy} = \int_S z^2 dS} \quad \text{moment quadratique autour de l'axe (G, } \vec{y}\text{)} \quad \boxed{I_{Gz} = \int_S y^2 dS} \quad \text{moment quadratique autour de l'axe (G, } \vec{z}\text{)} \quad \boxed{I_{Gyz} = \int_S yz dS} \quad \text{moment quadratique autour de l'axe (G, } \vec{z}\text{)} \quad \boxed{I_G = I_{Gy} + I_{Gz}}$$

2. Théorème de Huygens

$$\begin{aligned} I_0 &= (y_G^2 + z_G^2)S + I_G \\ I_{0y} &= z_G^2 S + I_{Gy} \\ I_{0z} &= y_G^2 S + I_{Gz} \end{aligned}$$

3. Valeurs importantes

Circulaire	$I_G = \frac{\pi D^4}{32}$	$I_{Gy} = I_{Gz} = \frac{I_G}{2}$
Circulaire creuse	$I_G = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$	$I_{Gy} = I_{Gz} = \frac{I_G}{2}$
Rectangulaire	$I_G = \frac{hb(b^2 + h^2)}{12}$	$I_{Gy} = \frac{h^3 b}{12}$ $I_{Gz} = \frac{hb^3}{12}$
Carré	$I_G = \frac{a^4}{6}$	$I_{Gy} = I_{Gz} = \frac{I_G}{2}$