

I. Masse m et centre de masse G

$$m = \int_S dm = \int_S \rho d\tau$$

$$\int_S \vec{GM} dm = \vec{O}$$

$$\vec{CG} = \frac{1}{m} \int_S \vec{CM} dm$$

$$\boxed{\vec{CG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{CG}_i} \quad (m = \sum m_i)$$

m (kg) : masse du solide

dm (kg) : masse élémentaire

ρ (kg/m³) : masse linéique / surfacique / volumique

$d\tau$ (m³) : élément linéique / surfacique / volumique

S : solide étudié

M : point du solide

G : centre d'inertie / de masse / de gravité

C : point quelconque

(m_i, G_i) : masse et centre des sous-systèmes

II. Opérateur d'inertie

1. Définition

$\overline{\overline{I_0(S)}}$ opérateur d'inertie de S :

$$\overline{\overline{I_0(S)}} = \begin{pmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ \textcolor{red}{A} & \textcolor{red}{B} & \textcolor{red}{C} \\ -F & -D & \textcolor{red}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$$

A, B, C : moments d'inertie :

$$A = I_{Ox} = \int_S (y^2 + z^2) dm$$

$$B = I_{Oy} = \int_S (x^2 + z^2) dm$$

$$C = I_{Oz} = \int_S (x^2 + y^2) dm$$

D, E, F : produits d'inertie :

$$D = I_{Oyz} = \int_S yz dm$$

$$E = I_{Oxz} = \int_S xz dm$$

$$F = I_{Oxy} = \int_S xy dm$$

2. Symétries matérielles

Lorsqu'un solide possède un plan de symétrie, les produits qui comportent la normale au plan de symétrie s'annulent.

3. Théorème de Huygens

$$\boxed{\overline{\overline{I_0(S)}} = \overline{\overline{I_G(S)}} + \overline{\overline{C}}}$$

$$\vec{OG} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$$

$$\overline{\overline{C}} = m \begin{pmatrix} (b^2 + c^2) & -ab & -ac \\ -ab & (a^2 + c^2) & -bc \\ -ac & -bc & (a^2 + b^2) \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$